

Вступительная работа, теоретическая часть

Решение каждой задачи должно быть записано в отдельном текстовом файле или файле форматов pdf или doc. Для сдачи решений вы должны зарегистрироваться на сайте ЛКШ www.lksh.ru, после чего через тестирующую систему вы можете сдать решения. В случае, если по какой-то задаче вы сдадите несколько решений, будет проверяться последнее из них.

В скобках около каждой задачи указаны параллели, на которые она ориентирована. Вы можете решать и сдавать помимо задач для вашей параллели и решения задач для других параллелей.

Во всех задачах требуется привести не только ответ, но и полное доказательство (обоснование).

Если что-то решить не получилось, не отчаивайтесь – быть может, того, что вы решили, будет достаточно для поступления в ЛКШ.

Задача Т-1 (А)

Задана последовательность чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Найдите такой отрезок $[l, r]$ наибольшей длины, что $a_l + \dots + a_r > 0$. Время работы $O(n)$. Предложите алгоритм, обоснуйте, что он решает указанную задачу, и оцените его сложность.

Задача Т-2 (А)

Приведите примеры графов без петель и кратных ребер (не более 10 вершин и 10 ребер), удовлетворяющих следующим условиям (или докажите, что соответствующего графа не существует):

- Неориентированный граф, у которого есть мосты, но нет точек сочленения.
- Неориентированный граф, у которого два или более моста лежат в цикле.
- Неориентированный граф, у которого две или более точки сочленения лежат в цикле.

г) Ориентированный несильносвязный граф, в котором есть две вершины (возможно, это одна и та же вершина): первая достижима из любой другой вершины, а из второй достижимы все остальные вершины.

Если соответствующий граф существует, приведите его рисунок (желательно) или описание. Если графа не существует – приведите полное обоснование того, почему он не существует.

Задача Т-3 (А, В)

В правильном N -угольнике все стороны ориентируем по часовой стрелке, то есть рассмотрим N векторов, которые образуют ориентированный контур многоугольника. Укажите, у каких векторов скалярное произведение:

- максимально,
- минимально.

Задача Т-4 (В)

Задана последовательность чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Найдите такие позиции l, r , что $a_l + \dots + a_r$ — максимально. Время работы $O(n)$. Предложите алгоритм, обоснуйте, что он решает указанную задачу, и оцените его сложность.

Задача Т-5 (В)

Приведите примеры графов без петель и кратных ребер (не более 10 вершин и 10 ребер), удовлетворяющих следующим условиям (или докажите, что соответствующего графа не существует):

а) Ориентированный граф, у которого между двумя вершинами s и t как минимум 9 различных путей, а так же любой путь между ними кратчайший.

б) Неориентированный граф, у которого путь между двумя различными вершинами проходит через некоторую вершину (одинаковую для всех пар вершин). Количество вершин должно быть не меньше 6, и количество ребер не меньше 6.

в) Неориентированный граф, у которого путь между двумя различными вершинами проходит через некоторое ребро (одинаковое для всех пар вершин). Количество вершин должно быть не меньше 6, и количество ребер должно быть не меньше 6.

Задача Т-6 (А,В,С)

Рассмотрим следующую задачу. Есть глобальный массив a (используются его элементы с 1-го по N -ый), элементы идут в неубывающем порядке (это важно!). Требуется найти в этом массиве элемент, равный k . Рассмотрим такую функцию, которая осуществляет поиск:

На языке паскаль:

```
function find(i, j, k: integer): integer;
  var q: integer;
  begin
    q := (i + j) div 2;
    if a[q] = k then find := q
    else
      if a[q] > k then find := find(i, q, k)
      else find := find(q, j, k);
  end;
```

На языке Си:

```
int find(int i, int j, int k)
{
  int q;
  q = (i + j) / 2;
  if (a[q] == k) return q;
  else {
    if (a[q] > k) return find(i, q, k);
    else return find(q, j, k);
  }
}
```

На языке Python 3:

```
def find(i, j, k):
  q = (i + j) // 2 # // - целочисленное деление
  if a[q] == k:
    return q
  elif a[q] > k:
    return find(i, q, k)
  else:
    return find(q, j, k)
```

Для поиска элемента, равного k , ее нужно вызвать с параметрами $\text{find}(1, N, k)$, где N — количество элементов в массиве.

Ответьте на следующие вопросы:

- 1) Всегда ли, если в массиве есть элемент, равный k , функция вернет его номер?
- 2) Что будет, если искомого элемента в массиве нет?
- 3) Приведите текст функции (по-возможности, модифицировав исходный текст как можно меньше) так, чтобы в случае отсутствия элемента функция возвращала бы 0, а в случае наличия элемента, всегда возвращала бы его номер.
- 4) Оцените сложность этой функции в зависимости от N .

Задача Т-7 (С)

а) Может ли число, записываемое в некоторой системе счисления как 10110 быть нечетным? Если да, приведите пример такой системы счисления, если нет — обоснуйте.

б) Та же задача про число 20110.

Задача Т-8 (С)

В графе из 100 вершин есть 8 ребер (кратные ребра и петли не допускаются). Какое максимальное и какое минимальное количество компонент связности может быть в этом графе?

Задача Т-9 (С, D)

Петя и Вася играют в такую игру. На столе лежит 20 спичек. Петя и Вася по очереди могут брать со стола любое число спичек (от 1 до 5). Петя ходит первым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

- Кто выиграет при правильной игре, и как он должен для этого играть?
- Кто выиграет, если изначально на столе будет лежать N спичек?

Задача Т-10 (D)

Является ли число $23021^{377} - 1$ простым? Помимо ответа, опишите способ, каким вы этот ответ получили.

Задача Т-11 (D)

На занятии по программированию ученикам было предложено две задачи. В конце занятия учитель составил четыре списка: I – решивших первую задачу, II – решивших только одну задачу, III – решивших по крайней мере одну задачу, IV – решивших обе задачи. Какой из списков самый длинный? Могут ли два списка совпадать по составу? Если да, то какие?

Задача Т-12 (К)

Вы решили купить сейф для хранения очень важной информации. Продавец предлагает вам два сейфа на выбор:

- ▲ **Первый сейф** имеет 10 дисков, по 100 чисел на каждом. Чтобы открыть такой сейф, каждый из дисков необходимо установить в правильное положение.
- ▲ **Второй сейф** имеет 100 переключателей, каждый с двумя положениями — включить или выключить. Чтобы открыть такой сейф, необходимо включить только нужные переключатели.

Какой из сейфов вы выберете? Объясните свой выбор.

Задача Т-13 (К)

Вы поймали шпиона, у которого с собой было хитрое устройство и инструкция к нему.

Устройство — это коробочка с тремя выдвижными ящиками, на каждом из которых есть надпись.

Инструкция гласит: «При открытии одного из ящиков содержимое остальных уничтожается. Надписи на ящиках подскажут, который из них нужный. Всё, что написано на одном — чистая правда, на другом — ложь, а на третьем — одно утверждение истинно и одно ложно.»

В хитром устройстве спрятана очень важная информация. Откройте нужный ящик и получите её. Опишите цепочку логических рассуждений.

Надписи на ящиках:

Ящик 1:

- Этот ящик не открывайте.
- Обязательно откройте второй.

Ящик 2:

- Не надо открывать первый ящик.
- Откройте третий.

Ящик 3:

- Не стоит открывать этот ящик.
- Смело открывайте первый.

Задача Т-14 (К)

Недавно мы узнали функцию, которая по имени пользователя умеет генерировать пароль. Она просто заменяет все буквы следующим образом:

a → c	i → ddd	q → accd
b → daa	j → bcd	r → accba
c → dab	k → bdc	s → abac
d → dac	l → acaa	t → abcd
e → dad	m → acacd	u → abcba
f → db	n → acab	v → aa
g → dca	o → acadca	
h → dcb	p → acadac	

Ваш беспечный друг назвал вам пароль в полной уверенности, что вы не подберете имя пользователя. Его пароль

abacabcbaacadacdadaccbadcbcdabbdcdadaccbacacaadadbdcabaccacabdacaccba

Назовите имя вашего друга. Как вы оцениваете безопасность использования данной функции? Оба ответа обоснуйте.

Задача Т-15 (К)

Что напевает наш админ?

H thfv j thyv cl-thlv
H kjfv lc dvl dv cy ohav
Hldhqv j tjw jtt qjs
H'fv jtuj sd wvvl okhd ujs
H'a j ivvb
H'a j ivvb
Ck kc H'a j ivvb
Iccq Tcgq H'a j ivvb

Задача Т-16 (К)

Вы знаете, что среди ваших друзей есть те, кто умеет хранить тайны, и те, кто расскажет всё внимательному слушателю. Вы не знаете точно, кто верный друг, а кто не очень. Ваша задача — передать через друзей сообщение преподавателю таким образом, чтобы никто, кроме вас, друзей и преподавателя, не знал о том, что за сообщение вы передали.

Придумайте, как это сделать. Друзей у вас строго больше двух, и, по крайней мере, один из них умеет хранить тайны, а один — нет.

Задача Т-17 (К)

Какими способами можно получить помощь по какой-нибудь консольной команде в ОС Windows и Linux? Назовите и прокомментируйте все способы.

Задача Т-18 (К)

Напишите небольшое эссе на тему «Что такое компьютерная безопасность».