

Вступительная работа в ЛКШ 2012

Версия 1.2 от 23.04.2012

Ниже приведены теоретические задачи.

Задачи Т1-Т12 предназначены для поступающих в параллели А-Д (поступающим в параллели А', В', С' рекомендуется решать посильные задачи для смежных параллелей). Задачи К1-К6 предназначены для поступающих в параллель К.

Сдавайте те задачи, которые вы решили, даже, если их немного — возможно 1-2 хорошо решенных задач будет достаточно для поступления.

Если в задаче есть несколько пунктов, вы можете привести решения лишь для некоторых из них (но выше будут оцениваться полные решения).

Старайтесь четко формулировать свои мысли.

Во всех задачах необходимо не только привести ответ, но и обосновать его.

Задача Т1. (Параллель А)

Рассмотрим перестановку n чисел от 1 до n : $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Обозначим как $up(A)$ длину наибольшей возрастающей подпоследовательности в A и как $down(A)$ длину наибольшей убывающей подпоследовательности в A .

Докажите, что $up(A) \times down(A) \geq n$.

Задача Т2. (Параллель А)

Ниже приведен код некоторого алгоритма. Программа получает на вход строку длиной от 1 до 10^6 и выводит некоторый массив чисел.

| Паскаль | Си++ |
|--|--|
| <pre>uses Math; const maxn = 1000000; var i, l, r, n: longint; s: string; z: array [1..maxn] of longint; begin readln(s); n := length(s); s := s + #0; l := 1; r := 1; for i := 2 to n do begin if i < r then z[i] := min(z[i - 1 + 1], r - i) else z[i] := 0; while s[l + z[i]] = s[i + z[i]] do z[i] := z[i] + 1; l := i; r := i + z[i]; end; for i := 1 to n do write(z[i], ' '); end.</pre> | <pre>#include <cstdio> #include <cstring> #include <algorithm> using namespace std; const int MAXN = 1000000; int main() { char s[MAXN + 1]; scanf("%s", s); int n = strlen(s); int z[MAXN]; int l = 0; int r = 0; for (int i = 1; i < n; i++) { if (i < r) z[i] = min(z[i - 1], r - i); else z[i] = 0; while (s[z[i]] == s[i + z[i]]) z[i]++; l = i; r = i + z[i]; } for (int i = 0; i < n; i++) printf("%d ", z[i]); }</pre> |

| Java | Python |
|--|---|
| <pre> import java.util.*; import java.io.*; public class Z { public static void main(String[] ss) { Scanner in = new Scanner(System.in); char[] s = (in.next() + (char)0).toCharArray(); int n = s.length; int[] z = new int[n]; int l = 0; int r = 0; for (int i = 1; i < n; i++) { if (i < r) z[i] = Math.min(z[i - 1], r - i); else z[i] = 0; while (s[z[i]] == s[i + z[i]]) z[i]++; l = i; r = i + z[i]; } for (int i = 0; i < n; i++) System.out.print(z[i] + " "); } } </pre> | <pre> s = input()+ '\u0000' n = len(s) z = dict() l = 0 r = 0 z[0] = 0 for i in range(1, n): if i < r: z[i] = min(z[i - 1], r - i) else: z[i] = 0 while s[z[i]] == s[i + z[i]]: z[i] = z[i] + 1 l = i r = i + z[i] for i in range(0, n): print(z[i]) </pre> |

- а) Что делает приведенная программа?
б) Постройте тест, на котором приведенная программа работает долго.
в) Предложите исправление, после которого программа выводит такой же массив для любой строки, но работает быстро для любой входной строки не длиннее 10^6 .
Обоснуйте ваши ответы.

Задача Т3. (Параллель А)

Будем называть треугольником в неориентированном графе три вершины, попарно соединенные ребрами. Постройте неориентированный граф, содержащий 10 вершин и максимальное возможное число ребер, в котором нет треугольников.

Докажите оптимальность вашего ответа.

Задача Т4. (Параллели А, В)

У Пети есть n кусочков пластилина весом 1 грамм.

Петя несколько раз выполняет следующую операцию: он берет два кусочка и объединяет их в один. Задана последовательность операций, которые сделал Петя в формате (a_i, b_i) . Это означает, что на i -м шаге Петя объединил кусочки массой a_i и b_i грамм.

Требуется разработать алгоритм, который сообщит для каждой операции Пети, кусочек какого минимального веса имеется у Пети после выполнения этой операции.

Например, если у Пети было 8 кусочков и он выполнил операции $(1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, то вывод алгоритма должен быть: 1, 1, 1, 1, 2, 3.

- а) Время работы алгоритма должно быть пропорционально $n \log n$.
б) Время работы алгоритма должно быть пропорционально n .

Задача Т5. (Параллель В)

Рассмотрим строку s длины n , занумеруем ее символы от 1 до n . Будем называть число p *периодом* строки s , если для всех i от 1 до $n - p$ выполняется $s[i] = s[i + p]$. Будем называть число q *гранью* строки s , если выполнено $s[1..q] = s[n - q + 1..n]$ (иначе говоря, префикс длины q равен суффиксу длины q).

Докажите, что p является периодом строки s тогда и только тогда, когда $n - p$ является ее гранью.

Задача Т6. (Параллели В, С)

Двудольным называется неориентированный граф, вершины которого можно раскрасить в два цвета, чтобы никакие две вершины одного цвета не были соединены ребром.

Какое максимальное число ребер может быть в двудольном графе с 20 вершинами? Обоснуйте ваш ответ.

Задача Т7. (Параллели В, С)

В шеренге стоят 1024 солдата. Занумеруем позиции, на которых стоят солдаты, от 0 до 1023. Когда прапорщик дает команду «перегруппировка!», происходит следующее. Солдаты, которые стоят на нечетных позициях, выходят из шеренги и, не меняя порядка, встают в конец шеренги. После этого шеренга смыкается.

Например, если бы исходно в шеренге стояло 4 солдата: Иванов, Петров, Сидоров и Медведев, то после команды «перегруппировка» солдаты стояли бы в порядке Иванов, Сидоров, Петров, Медведев.

Прапорщик отдал команду «перегруппировка» пять раз подряд.

а) На какой позиции после этого будет стоять солдат, который исходно стоял на 239-й позиции? (напомним, что позиции занумерованы с 0)

б) Приведите пример солдата, который после выполнения команд окажется на той же позиции, на которой стоял исходно.

в) Сколько солдат окажется после выполнения команд окажется на той же позиции, на которой они стояли исходно?

г) Какими были бы ответы на вопросы а)–в), если бы в шеренге стояли 2^{20} солдат?

д) Какими были бы ответы на вопросы а)–в), если бы в шеренге стояли 2^{32} солдат?

Обоснуйте ваши ответы и приведите все промежуточные вычисления.

Задача Т8. (Параллель С)

Рассмотрим массив $a[1..n]$. Для $1 \leq i \leq j \leq n$ обозначим как $rmq(i, j)$ позицию минимального элемента в этом массиве среди $a[i], a[i + 1], \dots, a[j]$, а если таких элементов несколько, то первого из них. Например, если $a = (3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$, то $rmq(2, 5) = 2$, а $rmq(3, 7) = 4$.

Разработайте алгоритм, который по массиву a строит массив $r[i][j] = rmq(i, j)$ за время пропорциональное n^2 .

Задача Т9. (Параллель С)

Для каких n и m можно, начав с одной из клеток, обойти шахматную доску $m \times n$ шахматным королем, побывав в каждой клетке ровно один раз, и вернуться в исходную клетку?

Обоснуйте ваш ответ. Обоснование должно включать в том числе доказательство, что для других значений n и m решить задачу нельзя.

Задача Т10. (Параллели С, D)

В некоторой задаче на вход подается n целых чисел. Петя придумал алгоритм решения задачи, который выполняется за $1000n^2$ действий, а Ваня — алгоритм, который выполняется за $5n^3$ действий. Для каких значений n лучше воспользоваться Ваниным алгоритмом, а для каких — Петиним? Обоснуйте ваш ответ.

Задача Т11. (Параллели С, D)

Докажите, что среди любых четырех последовательных натуральных чисел найдутся два числа, которые не являются взаимно простыми.

Верно ли аналогичное утверждение для трех последовательных натуральных чисел?

Задача Т12. (Параллель D)

Сколько натуральных делителей у числа 10^{100} ? Обоснуйте ваш ответ.

Задача Т13. (Параллель D)

Можно ли, начав с одной из клеток, обойти шахматную доску 7×7 шахматным конем, побывав в каждой клетке ровно один раз, и вернуться в исходную клетку? Обоснуйте ваш ответ.

Задача К1. (Параллель К)

Задано две 2 функции $F(x)$ и $G(x)$. $0 < x < 10$:

| | |
|------------|------------|
| $F(1) = 2$ | $G(1) = 4$ |
| $F(2) = 3$ | $G(2) = 5$ |
| $F(3) = 5$ | $G(3) = 2$ |
| $F(4) = 7$ | $G(4) = 8$ |
| $F(5) = 4$ | $G(5) = 7$ |
| $F(6) = 5$ | $G(6) = 3$ |
| $F(7) = 8$ | $G(7) = 9$ |
| $F(8) = 5$ | $G(8) = 6$ |
| $F(9) = 8$ | $G(9) = 1$ |

Требуется придумать такую цепочку последовательных применений функций, чтобы для любого значения получилось 5.

Задача К2. (Параллель К)

У нас есть кодовый замок следующего устройства: диск с числами от 0 до 255 написанными по часовой стрелке. Рядом с диском есть отметка, исходно около нее находится число 0. У замка есть две кнопки: (1) повернуть диск на 73 по часовой стрелке и (2) повернуть диск на 16 против часовой стрелки. После нажатия на кнопку диск медленно поворачивается. Поворот диска занимает 10 секунд.

Замок откроется, если после какой-то последовательности нажатий на кнопки напротив отметки окажется число 66. Сколько нам надо затратить времени на открытие замка? Любое ли число можно получить напротив отметки?

Задача К3. (Параллель К)

Мы придумали собственную шифровальную машину! У неё следующий принцип работы:

Каждая буква русского алфавита (буквы Е и Ё отождествлены) представляется в виде пятизначной комбинации из нулей и единиц, соответствующих двоичной записи номера данной буквы в алфавите (нумерация букв начинается с нуля). Например, буква А представляется в виде 00000, буква Б - 00001, буква Ч - 10111, буква Я - 11111. Заранее задана перестановка из пяти элементов. Для того, чтобы зашифровать некоторый текст, каждая его буква представляется комбинацией из нулей и единиц, эти нули и единицы переставляются по заданной перестановке и записываются буквой, которая представляется полученной комбинацией. Пробелы и знаки препинания удаляются.

Чем плоха наша шифровальная машина?

Расшифруйте текст, который мы на ней зашифровали: рхбкгвшыдбдчнш

Задача К4. (Параллель К)

Какой наименьший набор различных натуральных чисел надо взять для того, что бы можно было суммой некоторых из них представить любое натуральное число от 1 до 433?

Задача К5. (Параллель К)

Для доступа к управлению параметрами своего счета клиенту банка необходимо связаться по телефону с банком и набрать семизначный пароль. После первой же неправильно набранной цифры пароля банк прерывает телефонное соединение. Как надо действовать, чтобы за наименьшее число попыток подобрать пароль?

Задача К6. (Параллель К)

Напишите небольшое эссе на тему «Что такое компьютерная безопасность».